

Zur Praxis der Berechnung von räumlichen Stabwerken mit Hilfe von Übertragungsmatrizen

Schumpich, Georg
Spierig, Siegfried

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 13, 1961,
S.193-213



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Zur Praxis der Berechnung von räumlichen Stabwerken mit Hilfe von Übertragungsmatrizen

Von Georg Schumpich und Siegfried Spierig

vorgelegt von E. Pestel

(Eingegangen am 29. 9. 1961)

Summary: A given space-structure is approximated by a system which contains only untwisted straight or plane curved beams as well as discrete twists and corners. The transfer matrices for such substitute system are derived.

Übersicht: Ein gegebenes räumliches Stabwerk wird näherungsweise durch ein System ersetzt, das nur unverwundene gerade oder eben gekrümmte Stäbe, sprunghafte Verwindungen und Knickstellen enthält. Für ein solches Ersatzsystem werden die Übertragungsmatrizen bereitgestellt.

1. Aufgabenstellung, Ersatzsystem

Das Verfahren der Übertragungsmatrizen hat in den letzten Jahren zunehmende Verbreitung erfahren. Übersichtlichkeit und Einfachheit in der Durchführung machen dieses Verfahren besonders geeignet für die Durchführung auf modernen digitalen Rechenanlagen. So wurde es zur Lösung immer komplizierterer Probleme der Kinetik und Statik herangezogen. Nicht zuletzt wurde die Verbreitung der Übertragungsmatrizenmethode in der Praxis dadurch gefördert, daß in zahlreichen Arbeiten (z. B. [1—7, 11—13]) Übertragungsmatrizen für Spezialfälle explizit bereitgestellt wurden. Diese Übertragungsmatrizen dienen als Bausteine, aus denen das Rechenschema für eine spezielle Aufgabe leicht aufgebaut werden kann, und ermöglichen dadurch dem Praktiker eine zweckmäßige und rasche Durchführung des Verfahrens.

Hauptsächlich wurden bis jetzt mit dem Verfahren der Übertragungsmatrizen ebene Stabwerke mit geraden und eben gekrümmten Stäben behandelt. Die Ausdehnung des Verfahrens auf Stabwerke mit räumlich gekrümmten Stäben bereitet theoretisch keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Wenn das Übertragungsmatrizenverfahren bis jetzt in der Praxis kaum auf den räumlichen Fall angewandt wurde, so ist der Grund hierfür nicht allein darin zu suchen, daß im räumlichen Fall der Rechenaufwand naturgemäß ansteigt (12reihige Matrizen), sondern auch in der Tatsache, daß hier die Übertragungsmatrizen nicht wie im ebenen Fall explizit bereitstehen. Schon in dem einfachsten Fall eines räumlich gekrümmten Stabes — eines Stabes konstanten Querschnittes, dessen Stabachse eine Schraubenlinie ist (konstante Krümmung, konstante Windung)¹⁾ — läßt sich die Übertragungsmatrix nicht mehr

¹⁾ Das dem Problem zugrunde liegende lineare Differentialgleichungssystem hat in diesem Fall konstante Koeffizienten.

explizit angeben, d. h. ihre Elemente lassen sich nicht mehr formelmäßig als bekannte Funktionen der gegebenen Daten des Stababschnittes (Länge, Krümmung, Windung, Steifigkeiten, Massebelegung) ausdrücken.

Näherungsweise kann nun ein Stabwerk mit räumlich gekrümmten Stäben dadurch erfaßt werden, daß man ihm ein Ersatzsystem zuordnet, welches im wesentlichen allein mit Hilfe der vom linearen und ebenen Fall her bekannten Übertragungsmatrizen durchgerechnet werden kann. Dazu müssen bei der Aufstellung des Ersatzsystems die Stabachsen der einzelnen Stabzüge des Stabwerkes stückweise durch Geraden bzw. Kreisbögen angenähert, die gegebene Masse- und Steifigkeitsverteilung durch eine stückweise konstante oder diskrete, ferner die stetige Verwindung durch eine sprunghafte ersetzt werden (Abb. 1). Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem zweckmäßigen Vor-

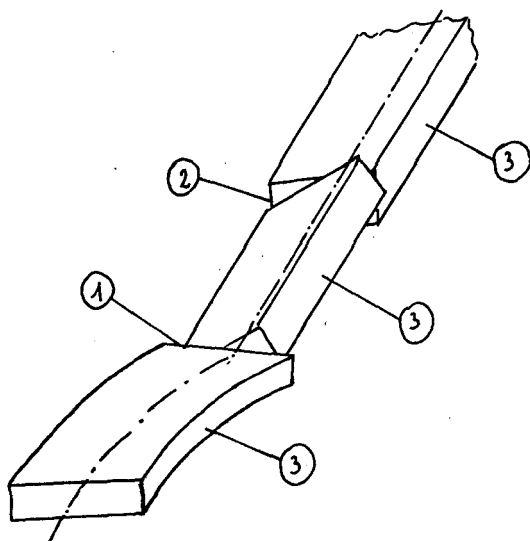


Abb. 1. Ersatzsystem

1) Knick; (2) Sprunghafte Verwindung; (3) Unverwundenes gerades oder eben gekrümmtes Stabfeld

gehen bei der Durchrechnung eines solchen Ersatzsystems nach dem Verfahren der Übertragungsmatrizen. Für die Übertragung des Zustandsvektors über eine Knicke- und Sprunghafte Verwindung der Stabachse, d. h. über eine Stelle, an der zwei Stabstücke des Ersatzsystems unter einem Winkel aneinander anschließen, wird eine Übertragungsmatrix hergeleitet, die im folgenden als *Eckmatrix* bezeichnet wird. Die Eckmatrix wird in einer solchen Form angegeben, daß sie durch rein schematisches Vorgehen ermittelt werden kann. Die für die Berechnung ihrer Elemente benötigten Daten können leicht aus einer Konstruktionszeichnung entnommen werden. Mit Hilfe der Eckmatrix läßt sich der Rechnungsgang weitgehend schematisieren und das Übertragungsmatrizenverfahren bei räumlichen Stabwerken genauso wie im ebenen Fall zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen bzw. statischer Aufgaben anwenden.

2. Übertragungsmatrizen

Für die drei wesentlichen Elemente des gewählten Ersatzsystems (vgl. Abb. 1)

- (1) Knick der Stabachse
- (2) sprunghafte Verwindung
- (3) unverwundener gerader oder eben gekrümmter Stab

sollen im folgenden die Übertragungsmatrizen bereitgestellt werden. Die Übertragungsmatrix für einen Knick der Stabachse — die Eckmatrix — wird in einer solchen Form angegeben, daß durch sie eine an der Knickstelle eventuell auftretende sprunghafte Verwindung mit erfaßt wird. Der Vollständigkeit halber ist auch die Übertragungsmatrix für eine exzentrische Einzelmasse mit aufgenommen.

2.1. Übertragungsmatrix für einen Knick (Eckmatrix)

2.1.1. Zusammenhang zwischen der Eckmatrix und der Transformationsmatrix des Hauptachsensystems

Um für die Eckmatrix einen übersichtlichen Aufbau zu erhalten, gehen wir von der folgenden Form des 12reihigen Zustandsvektors aus (bezüglich der Bezeichnung der Komponenten vgl. Abschnitt 4):

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \dots \\ \delta \\ \varphi \\ \varphi \\ T \\ M_y \\ M_z \\ \dots \\ N \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \dots \\ \mathbf{f} \\ \dots \\ \mathbf{M} \\ \dots \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dabei sind \mathbf{d} , \mathbf{f} , \mathbf{M} und \mathbf{K} zur Abkürzung eingeführte 3reihige Spaltenmatrizen. (Hinsichtlich der Transformation auf andere Formen des Zustandsvektors vgl. Abschnitt 2.1.3). Ferner führen wir die Spaltenmatrix

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

ein, in der die drei dem zugrunde gelegten x , y , z -Hauptachsensystem zugeordneten Einsvektoren zusammengefaßt sind. Damit läßt sich abkürzend schreiben (wobei \mathbf{a}' die Transponierte einer Matrix \mathbf{a} bedeutet):

$$\text{für die Verschiebung} \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}'\mathbf{e}, \quad (3a)$$

$$\text{für die Verdrehung}^2) \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}'\mathbf{e}, \quad (3b)$$

$$\text{für das Schnittmoment} \quad \mathfrak{M} = \mathbf{M}'\mathbf{e}, \quad (3c)$$

$$\text{für die Schnittkraft} \quad \mathfrak{R} = \mathbf{K}'\mathbf{e}. \quad (3d)$$

Die durch (3a–d) definierten physikalischen Vektoren sind einem Knick der Stabachse gegenüber invariant. Sie werden jedoch vor und hinter einer Knickstelle auf verschiedene Koordinatensysteme bezogen.

Zur Unterscheidung kennzeichnen wir alle Größen, die sich auf die Stelle unmittelbar vor dem Knick beziehen, mit dem hochgestellten Index -0 und alle die Größen, die sich auf die Stelle unmittelbar nach dem Knick beziehen, mit $+0$. Der Zustandsvektor wird also unmittelbar vor dem Knick auf das

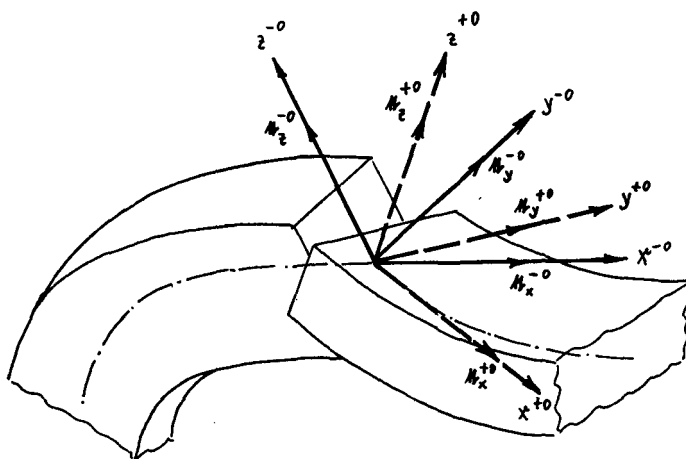


Abb. 2. Hauptträgheitsachsensysteme am Knick

$(x, y, z)^{-0}$ -System und unmittelbar nach dem Knick auf das $(x, y, z)^{+0}$ -System bezogen (Abb. 2). Zwischen den zugehörigen Einsvektorsystemen

$$\mathbf{e}^{-0} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}^{-0} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}^{+0} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}^{+0}$$

besteht ein durch die Beziehung

$$\mathbf{e}^{+0} = \mathbf{T} \mathbf{e}^{-0} \quad (4)$$

ausgedrückter linearer Zusammenhang, wobei \mathbf{T} eine im einzelnen noch näher zu bestimmende 3reihige quadratische Matrix ist. Wegen der oben erwähnten Invarianz und unter Berücksichtigung von (4) gilt:

²⁾ Die vektorielle Zusammensetzung der Winkel δ , ψ und φ gilt angenähert nur, wenn diese Winkel „klein“ sind, was hier vorausgesetzt sei.

$$\mathfrak{d} = (\mathfrak{d}^{-0})' \mathfrak{e}^{-0} \quad (5a)$$

$$= (\mathfrak{d}^{+0})' \mathfrak{e}^{+0} = (\mathfrak{d}^{+0})' \mathbf{T} \mathfrak{e}^{-0},$$

$$\mathfrak{f} = (\mathfrak{f}^{-0})' \mathfrak{e}^{-0} \quad (5b)$$

$$= (\mathfrak{f}^{+0})' \mathfrak{e}^{+0} = (\mathfrak{f}^{+0})' \mathbf{T} \mathfrak{e}^{-0},$$

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}^{-0})' \mathfrak{e}^{-0} \quad (5c)$$

$$= (\mathfrak{M}^{+0})' \mathfrak{e}^{+0} = (\mathfrak{M}^{+0})' \mathbf{T} \mathfrak{e}^{-0},$$

$$\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}^{-0})' \mathfrak{e}^{-0} \quad (5d)$$

$$= (\mathfrak{K}^{+0})' \mathfrak{e}^{+0} = (\mathfrak{K}^{+0})' \mathbf{T} \mathfrak{e}^{-0}.$$

Aus (5a) folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der in \mathfrak{e} zusammengefaßten Einsvektoren

$$(\mathfrak{d}^{+0})' \mathbf{T} = (\mathfrak{d}^{-0})'.$$

Die Auflösung nach \mathfrak{d}^{+0} unter Berücksichtigung der Orthogonalität (Drehtransformation!) der Matrix \mathbf{T} ($\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}'$) ergibt

$$(\mathfrak{d}^{+0})' = (\mathfrak{d}^{-0})' \mathbf{T}' = (\mathbf{T} \mathfrak{d}^{-0})', \quad (6a)$$

$$\mathfrak{d}^{+0} = \mathbf{T} \mathfrak{d}^{-0}.$$

Entsprechend folgt

$$\mathfrak{f}^{+0} = \mathbf{T} \mathfrak{f}^{-0}, \quad (6b)$$

$$\mathfrak{M}^{+0} = \mathbf{T} \mathfrak{M}^{-0}, \quad (6c)$$

$$\mathfrak{K}^{+0} = \mathbf{T} \mathfrak{K}^{-0}. \quad (6d)$$

Die Beziehungen (6a—d) lassen sich in einer Matrixgleichung

$$\tilde{\mathbf{z}}^{+0} = \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{z}}^{-0} \quad (7)$$

zusammenfassen, wobei die Matrix $\tilde{\mathbf{U}}$ — die gesuchte Eckmatrix — folgenden übersichtlichen Aufbau hat:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{array} \right] \quad (8)$$

Das Problem der Aufstellung der 12reihigen Eckmatrix ist damit zurückgeführt auf die Auffindung der 3reihigen Matrix \mathbf{T} , die die Transformation des $(x, y, z)^{-0}$ -Systems in das $(x, y, z)^{+0}$ -System beschreibt.

2.1.2. Ermittlung der Transformationsmatrix T des Hauptachsensystems

Bei der Herleitung der Matrix T muß berücksichtigt werden

- (1) die sprunghafte Richtungsänderung der Stabachsentangente an der Knickstelle und
- (2) die Lage der Hauptträgheitsachsen (y^{-0}, z^{-0} sowie y^{+0}, z^{+0}).

Die sprunghafte Richtungsänderung läßt sich am besten durch die Angabe dreier Punkte P , Q und R beschreiben. Dabei soll der Punkt Q mit dem Knickpunkt zusammenfallen, während P und R irgendwelche Punkte auf den Tangenten sind, die sich im Knickpunkt an die dort zusammenstoßenden Stabachsen legen lassen (Abb. 3). Enthält das Ersatzsystem zwischen den

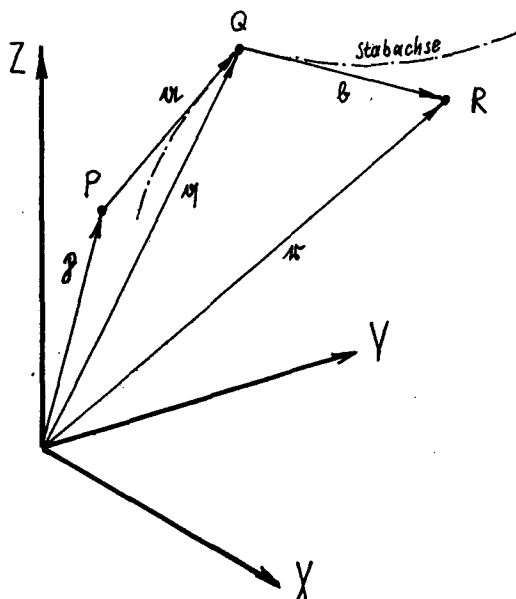


Abb. 3. Festlegung eines Knicks der Stabachse durch drei Punkte P , Q und R

Knickpunkten nur gerade Abschnitte, so wird man zweckmäßig für P und R die benachbarten Knickpunkte wählen. Die Punkte P , Q und R legen wir fest durch ihre Ortsvektoren \mathbf{p} , \mathbf{q} und \mathbf{r} , deren Komponentendarstellung in einem rechtwinkligen, rechtshändigen X, Y, Z -Koordinatensystem lautet:

$$\mathbf{p} = \{p_X, p_Y, p_Z\}, \quad \mathbf{q} = \{q_X, q_Y, q_Z\}, \quad \mathbf{r} = \{r_X, r_Y, r_Z\} \quad (9)$$

Ferner führen wir die Differenzvektoren

$$\mathbf{a} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = \{a_X, a_Y, a_Z\}, \quad (10a)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} - \mathbf{q} = \{b_X, b_Y, b_Z\} \quad (10b)$$

ein mit

$$\begin{aligned} a_X &= q_X - p_X, & b_X &= r_X - q_X, \\ a_Y &= q_Y - p_Y, & b_Y &= r_Y - q_Y, \\ a_Z &= q_Z - p_Z, & b_Z &= r_Z - q_Z. \end{aligned} \quad (11)$$

Für die Beschreibung der Lage der y - und z -Hauptachsen führen wir das wie folgt definierte, ebenfalls rechtwinklige, rechtshändige ξ, η, ζ -Zwischensystem ein (Abb. 4):

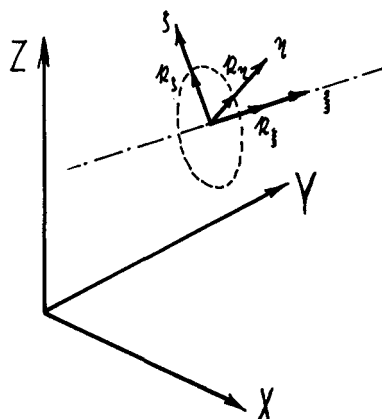


Abb. 4. ξ, η, ζ -Zwischensystem

ξ -Achse: wie die x -Achse mit der Stabachsentangente zusammenfallend und in Fortschrittsrichtung weisend.

η -Achse: parallel zur X, Y -Ebene und so gerichtet, daß die ζ -Achse in denselben Halbraum über der X, Y -Ebene weist wie die Z -Achse.

Sonderfall: Falls die Stabachse parallel zur Z -Achse verläuft, ist vorstehende Erklärung der η -Achse nicht mehr eindeutig. Für diesen Fall definieren wir:

η -Achse: der Y -Achse parallel und gleichgerichtet.

ζ -Achse: ergänzt ξ - und η -Achse zu einem Rechtssystem.

Bemerkung: Zunächst erscheint es naheliegender, statt des oben definierten ξ, η, ζ -Systems ein anderes Zwischensystem einzuführen, das der durch die Punkte P, Q und R aufgespannten Knickebene angepaßt ist (z. B. η -Achse in der Knickebene liegend). Für die praktische Anwendung ist jedoch das Hauptaugenmerk darauf zu richten, daß die benötigten Daten in möglichst einfacher Weise aus der Konstruktionszeichnung entnommen werden können. Die Zweckmäßigkeit des hier benutzten ξ, η, ζ -Systems ergibt sich daraus, daß seine Lage in der jeweiligen Konstruktionszeichnung leicht ermittelt werden kann, wenn das X, Y, Z -System in geeigneter Weise den Zeichenebenen angepaßt wurde (z. B. X, Y -Ebene \equiv Grundrißebene der Konstruktionszeichnung). Dagegen erfordert die Feststellung der Lage der Knickebene meist eine mehr oder weniger umfangreiche und schlecht schematisierbare Vorbereitungsrechnung.

Die Transformation des $(x, y, z)^{-0}$ -Systems in das $(x, y, z)^{+0}$ -System, für die wir die Transformationsmatrix T bestimmen wollen, läßt sich durch eine Folge von fünf hintereinander geschalteten einfachen Drehungen um jeweils eine Koordinatenachse realisieren. Im folgenden machen wir zunächst die Voraussetzung:

a) Weder α noch β stehen senkrecht auf der X, Y -Ebene

Der 1. Transformationsschritt besteht darin, daß wir das $(x, y, z)^{-0}$ -System durch eine Drehung um die x^{-0} -Achse in das $(\xi, \eta, \zeta)^{-0}$ -System überführen

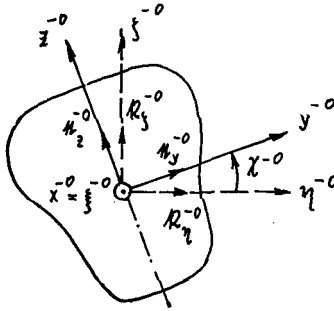


Abb. 5. Erster Transformationsschritt

(Abb. 5). Die Beziehung zwischen den betreffenden Einsvektorsystemen e^{-0} und k^{-0} lautet

$$k^{-0} = A^{-0} e^{-0}, \quad (12)$$

wobei

$$k^{-0} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^{-0} \quad (13)$$

das dem $(\xi, \eta, \zeta)^{-0}$ -System zugeordnete Einsvektorsystem und

$$A^{-0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi^{-0} & -\sin \chi^{-0} \\ 0 & \sin \chi^{-0} & \cos \chi^{-0} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ist.

Der Winkel χ (das gilt für χ^{-0} ebenso wie für χ^{+0} im 5. Transformationsschritt) bezeichnet die Lage des x, y, z -Hauptachsensystems gegenüber dem ξ, η, ζ -Zwischensystem und ist z. B. der Konstruktionszeichnung zu entnehmen. Er ist also positiv eingeführt, wenn das (x, y, z) -System durch eine mathematisch positive Drehung aus dem (ξ, η, ζ) -System hervorgeht (Rechtsschraube in bezug auf die ξ -Achse).

Im 2. Transformationsschritt wird das $(\xi, \eta, \zeta)^{-0}$ -System um die η^{-0} -Achse um einen Winkel β_1 derart gedreht, daß die ξ^* -Achse des entstehenden $(\xi, \eta, \zeta)^*$ -Systems parallel zur X, Y -Ebene zu liegen kommt (Abb. 6). Bei Beschränkung auf $|\beta_1| < \frac{\pi}{2}$, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, ist dann die ζ^* -Achse der Z -Achse parallel und gleichgerichtet. Bezeichnen wir das dem $(\xi, \eta, \zeta)^*$ -System zugeordnete Einsvektorsystem mit

$$k^* = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^* \quad (15)$$

so folgt

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{B}^{-0} \mathbf{k}^{-0} \quad (16)$$

mit

$$\mathbf{B}^{-0} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & 0 & -\sin \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_1 & 0 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2} \quad (18)$$

und

$$\bar{a} = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} \quad (19)$$

für die Länge des Vektors \mathbf{a} sowie die Länge seiner Projektion in die X, Y -Ebene erhält man für β_1 (Abb. 6)

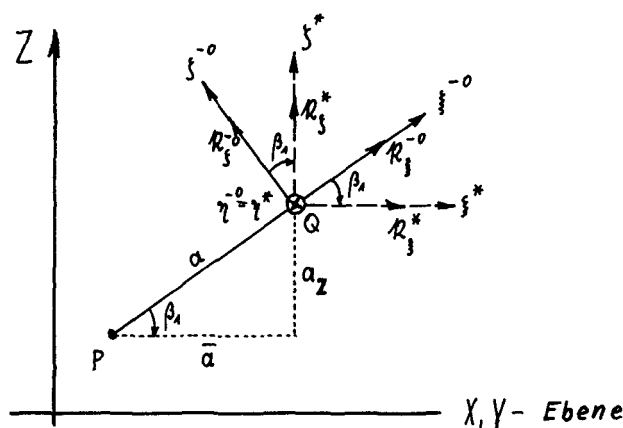


Abb. 6. Zweiter Transformationsschritt

$$\cos \beta_1 = \frac{\bar{a}}{a}, \quad (20)$$

$$\sin \beta_1 = \frac{a_Z}{a}. \quad (21)$$

Der 3. Transformationsschritt besteht in einer Drehung des $(\xi, \eta, \zeta)^*$ -Systems um die ζ^* -Achse. Dabei soll die ξ^{**} -Achse des entstehenden $(\xi, \eta, \zeta)^{**}$ -Systems nach Lage und Richtungssinn mit der Projektion des Vektors \mathbf{b} in die X, Y -Ebene zusammenfallen (Abb. 7). Dieser Transformationsschritt wird beschrieben durch

$$\mathbf{k}^{**} = \mathbf{C} \mathbf{k}^*. \quad (22)$$

Dabei bedeuten

$$\mathbf{k}^{**} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\xi}^* \\ \mathbf{k}_{\eta}^* \\ \mathbf{k}_{\zeta}^* \end{bmatrix}^{**} \quad (23)$$

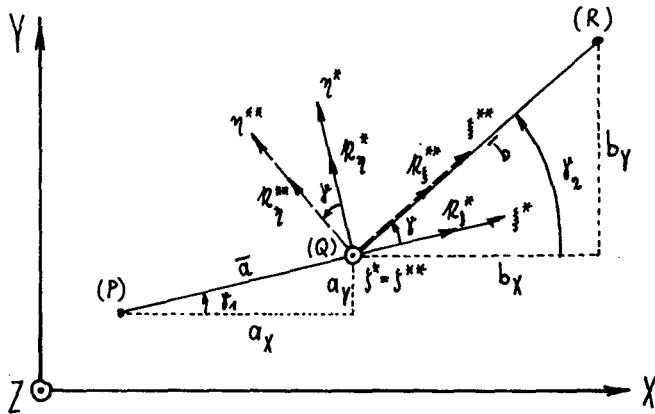


Abb. 7. Dritter Transformationsschritt

und

$$C = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Für den Winkel γ lesen wir aus Abb. 7 folgende Beziehungen ab

$$\gamma = \gamma_2 - \gamma_1,$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{b_X}{\bar{b}}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{a_X}{\bar{a}},$$

$$\sin \gamma_2 = \frac{b_Y}{\bar{b}}, \quad \sin \gamma_1 = \frac{a_Y}{\bar{a}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\bar{a}\bar{b}}(a_X b_X + a_Y b_Y), \quad (25)$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{\bar{a}\bar{b}}(a_X b_Y - a_Y b_X). \quad (26)$$

\bar{b} ist dabei die Länge der Projektion des Vektors \mathbf{b} in die X, Y -Ebene

$$\bar{b} = |\sqrt{b_X^2 + b_Y^2}|. \quad (27)$$

Im 4. Transformationsschritt wird das $(\xi, \eta, \zeta)^{**}$ -System durch Drehung um die η^{**} -Achse in das $(\xi, \eta, \zeta)^{+0}$ -System überführt, dessen ξ^{+0} -Achse dem Vektor \mathbf{b} parallel und gleichgerichtet ist (Abb. 8). Es gilt

$$\mathbf{k}^{+0} = \mathbf{B}^{+0} \mathbf{k}^{**} \quad (28)$$

mit

$$\mathbf{B}^{+0} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_2 & 0 & \cos \beta_2 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

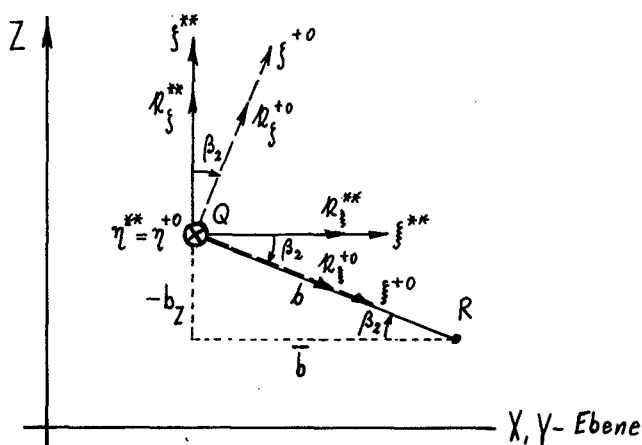


Abb. 8. Vierter Transformationsschritt

Für den Winkel β_2 liest man aus Abb. 8 ab

$$\cos \beta_2 = \frac{\bar{b}}{b}, \quad (30)$$

$$\sin \beta_2 = -\frac{b_z}{b}. \quad (31)$$

Dabei bezeichnet b die Länge des Vektors \mathbf{b}

$$b = |\mathbf{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}. \quad (32)$$

Der 5. Transformationsschritt schließlich liefert das $(x, y, z)^{+0}$ -Hauptachsensystem für die Stelle unmittelbar nach dem Knick. Es geht aus dem $(\xi, \eta, \zeta)^{+0}$ -System durch eine Drehung um die ξ^{+0} -Achse um den Winkel χ^{+0} hervor (Abb. 9). Für diesen letzten Transformationsschritt gilt die Beziehung

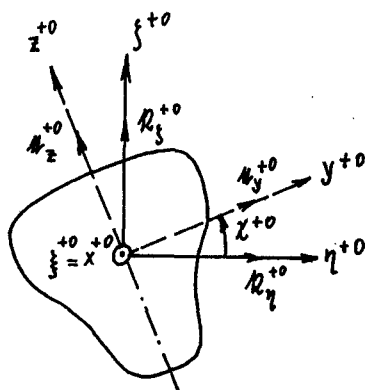


Abb. 9. Fünfter Transformationsschritt

$$\mathbf{e}^{+0} = \mathbf{A}^{+0} \mathbf{k}^{+0} \quad (33)$$

mit

$$\mathbf{A}^{+0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi^{+0} & \sin \chi^{+0} \\ 0 & -\sin \chi^{+0} & \cos \chi^{+0} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Hinsichtlich Bedeutung und Vorzeichendefinition von χ^{+0} vgl. die Beschreibung des 1. Transformationsschrittes.

Die gesuchte Transformationsmatrix \mathbf{T} erhalten wir durch aufeinanderfolgendes Einsetzen von (28), (23), (16) und (12) in (33) zu

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{+0} \mathbf{B}^{+0} \mathbf{C} \mathbf{B}^{-0} \mathbf{A}^{-0} \quad (35)$$

oder, wenn wir die mittleren drei Faktoren des Matrizenproduktes in (35) zu einer Matrix \mathbf{B} zusammenfassen,

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^{+0} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-0}. \quad (36)$$

Dabei ist

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{+0} \mathbf{C} \mathbf{B}^{-0} = \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \beta_1 \cos \gamma \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \gamma \cos \beta_2 & -\sin \beta_1 \cos \gamma \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \sin \beta_2 \\ -\cos \beta_1 \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \beta_1 \sin \gamma \\ \cos \beta_1 \cos \gamma \sin \beta_2 + \sin \beta_1 \cos \beta_2 \sin \gamma \sin \beta_2 & -\sin \beta_1 \cos \gamma \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \end{bmatrix}$$

Drückt man in (37) die Winkelfunktionen mit Hilfe von (20), (21), (25), (26), (30) und (31) durch die Komponenten der Differenzvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aus, so folgt

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{ab}(a_X b_X + a_Y b_Y + a_Z b_Z) & \frac{1}{\bar{a}b}(a_X b_Y - a_Y b_X) & \frac{1}{ab}\left[\bar{a}b_Z - \frac{a_Z}{\bar{a}}(a_X b_X + a_Y b_Y)\right] \\ -\frac{1}{a\bar{b}}(a_X b_Y - a_Y b_X) & \frac{1}{\bar{a}b}(a_X b_X + a_Y b_Y) & \frac{a_Z}{a\bar{a}b}(a_X b_Y - a_Y b_X) \\ \frac{1}{ab}\left[a_Z \bar{b} - \frac{b_Z}{b}(a_X b_X + a_Y b_Y)\right] & -\frac{b_Z}{\bar{a}b\bar{b}}(a_X b_Y - a_Y b_X) & \frac{1}{ab}\left[\bar{a}\bar{b} + \frac{a_Z b_Z}{\bar{a}\bar{b}}(a_X b_X + a_Y b_Y)\right] \end{bmatrix} \quad (38)$$

b) \mathbf{b} steht senkrecht auf der XY -Ebene ($b_X = b_Y = 0$) (Abb. 10)

Bei den ersten beiden Transformationsschritten ändert sich gegenüber Fall a) nichts. Beim 3. Schritt dagegen ergeben sich für den Winkel γ andere Beziehungen, weil das zu erzeugende $(\xi, \eta, \zeta)^{**}$ -System nicht mehr wie bei Fall a) nach der Projektion des Vektors \mathbf{b} in die X, Y -Ebene orientiert werden kann. Vielmehr muß die η^{**} -Achse (die mit der im 4. Schritt entstehenden η^{+0} -Achse zusammenfällt) der Y -Achse parallel und gleichgerichtet sein (vgl. die Definition des ξ, η, ζ -Systems für den Sonderfall einer zur Z -Achse parallelen Stabachse (S. 199)). Aus Abb. 11 liest man ab

$$\cos \gamma = \frac{a_X}{\bar{a}}, \quad (25^*)$$

$$\sin \gamma = -\frac{a_Y}{\bar{a}}. \quad (26^*)$$

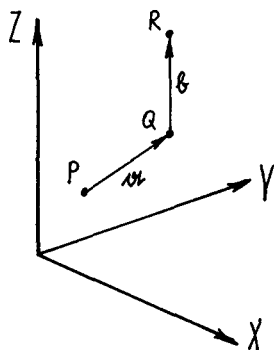


Abb. 10. Sonderfall:
b senkrecht auf X, Y -Ebene

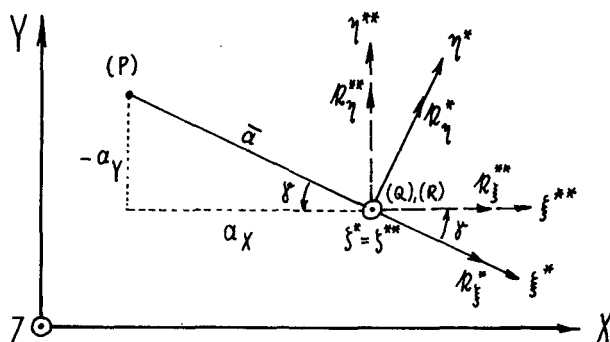


Abb. 11. Dritter Transformationsschritt, Sonderfall: \mathbf{b} senkrecht auf X , Y -Ebene

Die Schritte 4 und 5 bieten keine Besonderheiten gegenüber Fall a. Lediglich vereinfachen sich die Beziehungen (30) und (31) für den Winkel β_2 wegen $b_X = b_Y = 0$ zu

$$\cos \beta_2 = 0, \quad (30^*)$$

$$\sin \beta_2 = -\operatorname{sgn} b_Z. \quad (31^*)$$

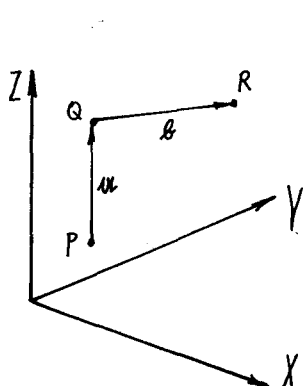


Abb. 12. Sonderfall:
 α senkrecht auf X, Y -Ebene

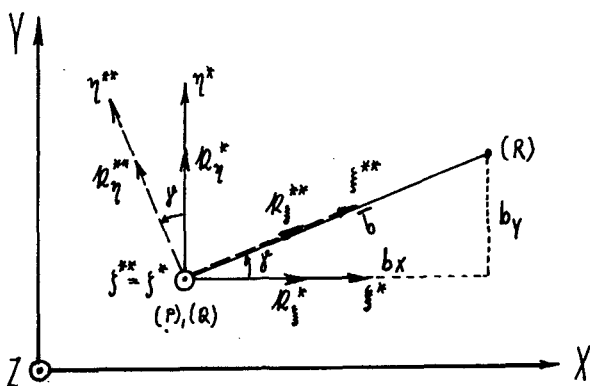


Abb. 13. Dritter Transformationsschritt, Sonderfall: α senkrecht auf X , Y -Ebene

Durch Einsetzen von (20), (21), (25*), (26*), (30*) und (31*) in (37) folgt

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{az}{a} \operatorname{sgn} b_z & 0 & \frac{\bar{a}}{a} \operatorname{sgn} b_z \\ \frac{a_Y}{a} & \frac{a_X}{\bar{a}} & -\frac{a_Y az}{a \bar{a}} \\ -\frac{a_X}{a} \operatorname{sgn} b_z & \frac{a_Y}{\bar{a}} \operatorname{sgn} b_z & \frac{a_X az}{a \bar{a}} \operatorname{sgn} b_z \end{bmatrix} \quad (38^*)$$

c) α steht senkrecht auf der X, Y -Ebene ($a_X = a_Y = 0$) (Abb. 13)
 Wegen $a_X = a_Y = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen (20) und (21) zu

$$\cos \beta_1 = 0, \quad (20^{**})$$

$$\sin \beta_1 = \operatorname{sgn} a_Z. \quad (21^{**})$$

Für den 3. Transformationsschritt liest man aus Abb. 13 ab

$$\cos \gamma = \frac{b_X}{\bar{b}}, \quad (25^{**})$$

$$\sin \gamma = \frac{b_Y}{\bar{b}}. \quad (26^{**})$$

Alles andere bleibt unverändert, und wir erhalten durch Einsetzen von (20**), (21**), (25**), (26**), (30) und (31) in (37)

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{b_Z}{\bar{b}} \operatorname{sgn} a_Z & \frac{b_Y}{\bar{b}} & -\frac{b_X}{\bar{b}} \operatorname{sgn} a_Z \\ 0 & \frac{b_X}{\bar{b}} & \frac{b_Y}{\bar{b}} \operatorname{sgn} a_Z \\ \frac{\bar{b}}{\bar{b}} \operatorname{sgn} a_Z & -\frac{b_Y b_Z}{\bar{b} \bar{b}} & \frac{b_X b_Z}{\bar{b} \bar{b}} \operatorname{sgn} a_Z \end{array} \right] \quad (38^{**})$$

2.1.3 Umformung einer Übertragungsmatrix beim Übergang zu einem anders definierten Zustandsvektor

Beim Übergang zu einem anderen Zustandsvektor \mathbf{z} , der mit dem bisher benutzten Vektor $\tilde{\mathbf{z}}$ durch die Beziehung

$$\mathbf{z} = S \tilde{\mathbf{z}}, \quad \tilde{\mathbf{z}} = S' \mathbf{z} \quad (39)$$

zusammenhängt, geht eine Beziehung

$$\tilde{\mathbf{z}}_{t+1} = \tilde{U} \tilde{\mathbf{z}}_t \quad (40)$$

über in

$$\mathbf{z}_{t+1} = S \tilde{U} S' \mathbf{z}_t = U \mathbf{z}_t. \quad (41)$$

Dabei ist

$$U = S \tilde{U} S' \quad (42)$$

die umgeformte Übertragungsmatrix. Bei der Umformung der Eckmatrix ist in (40)

$$\tilde{\mathbf{z}}_{t+1} = \tilde{\mathbf{z}}^{+0}, \quad \tilde{\mathbf{z}}_t = \tilde{\mathbf{z}}^{-0}$$

bzw. in (41)

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{z}^{+0}, \quad \mathbf{z}_t = \mathbf{z}^{-0}$$

zu setzen.

Zweckmäßig ist folgende, auch in der Literatur (z. B. [6, 7, 8, 10, 11, 12]) gewöhnlich verwendete Form des Zustandsvektors

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} u \\ N \\ \dots \\ \delta \\ T \\ \dots \\ v \\ \varphi \\ M_z \\ -Q_y \\ \dots \\ -w \\ \psi \\ M_y \\ Q_z \end{pmatrix} \quad (43)$$

In diesem Fall lautet die Transformationsmatrix \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

2.2. Übertragungsmatrix für eine sprunghafte Verwindung (Abb. 14)

Diese Übertragungsmatrix, im folgenden kurz *Verwindungsmatrix* genannt, folgt aus der Eckmatrix, wenn P , Q und R (Abb. 3) auf einer Geraden liegen.

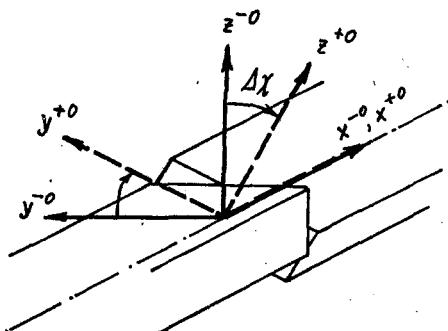


Abb. 14. Sprunghafte Verwindung

Die 12reihige Übertragungsmatrix in (48) läßt sich für eine Vielzahl von Fällen, wie im folgenden gezeigt wird, durch Kombinationen aus vom ebenen Fall her bekannten 2-, 4- bzw. 6-reihigen Übertragungsmatrizen aufbauen.

2.3.1 Gerader unverwundener Stab

Hier verschwinden in (48) sämtliche Untermatrizen U_{ij} für $i \neq j$, die die Bedeutung von Kopplungsgliedern haben. Die Untermatrizen

U_{11} für Normalkraft und Längsverschiebung,

U_{22} für die Torsion,

U_{33} für die Biegung in der x, y -Ebene und

U_{44} für die Biegung in der x, z -Ebene

sind der Literatur (z. B. [6, 11, 12]) zu entnehmen. Dabei sei darauf hingewiesen, daß bei der hier verwendeten Form des Zustandsvektors (vgl. (43), (48b)) die Matrizen U_{33} und U_{44} im Aufbau völlig gleich sind, lediglich die auf die betreffende Biegeebene bezuziehenden Indizes sind unterschiedlich.

2.3.2 Eben gekrümmter unverwundener Stab

Für den eben gekrümmten unverwundenen Stab liegen Übertragungsmatrizen nur für den Fall vor, daß die Hauptträgheitsachsen mit der Haupt- und der Binormalen der Stabachse zusammenfallen. Unter der Voraussetzung, daß der Krümmungsmittelpunkt auf der y -Achse liegt, ergeben sich allgemein folgende Matrizenbeziehungen³⁾:

(1) Für Bewegungen in der Hauptnormalebene:

$$\begin{bmatrix} u \\ N \\ \cdots \\ v \\ \varphi \\ M_z \\ -Q_y \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{13} \\ \cdots & \cdots \\ U_{31} & U_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ N \\ \cdots \\ v \\ \varphi \\ M_z \\ -Q_y \end{bmatrix}_i \quad (49)$$

(2) Für Bewegungen senkrecht zur Hauptnormalebene:

$$\begin{bmatrix} \delta \\ T \\ \cdots \\ -w \\ \psi \\ M_y \\ Q_z \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} U_{22} & U_{24} \\ \cdots & \cdots \\ U_{42} & U_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \\ T \\ \cdots \\ -w \\ \psi \\ M_y \\ Q_z \end{bmatrix}_i \quad (50)$$

Die in (49) und (50) vorkommenden Übertragungsmatrizen sind in [11] und [12] für eine Reihe von Fällen angegeben, und zwar unter der Voraussetzung,

³⁾ Die Umformung der Gleichungen (49) und (50) für den Fall, daß der Krümmungsmittelpunkt auf der z -Achse liegt, bereitet keine besonderen Schwierigkeiten. Einfacher ist es jedoch — gegebenenfalls durch Einschaltung einer Verwindungsmatrix — dafür zu sorgen, daß die y -Achse zum Krümmungsmittelpunkt weist.

daß der Krümmungsmittelpunkt auf dem positiven Ast der y -Achse liegt. Liegt er auf dem negativen Ast der y -Achse, so sind alle Kopplungsglieder U_{ij} ($i \neq j$) durch $-U_{ij}$ zu ersetzen. Die hier benötigte 12reihige Übertragungsmatrix erhält man durch Zusammenstellung der aus (49) und (50) zu entnehmenden Untermatrizen nach dem in (48b) angegebenen Schema.

2.4. Übertragungsmatrix für eine exzentrische Einzelmasse

Zwischen den Zustandsvektoren z^{-0} vor und z^{+0} hinter einer exzentrisch angeordneten Einzelmasse m (Abb. 15) besteht die Beziehung (51), vgl. S. 211.

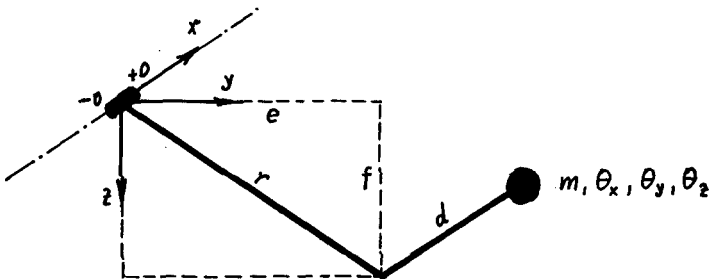


Abb. 15. Exzentrische Masse

In (51) bedeutet ω die gewählte Kreisfrequenz. Die Bedeutung der übrigen Abkürzungen ist der Abb. 15 zu entnehmen. Die Massenträgheitsmomente Θ_x , Θ_y und Θ_z beziehen sich dabei auf den Schwerpunkt der Masse.

3. Schlußbemerkung

Mit den bereitgestellten Matrizen lassen sich alle Eigenschwingungsprobleme beliebiger — auch verzweigter — räumlicher Stabwerke behandeln. Auch die Behandlung inhomogener Probleme (z. B. erzwungene Schwingung oder statische Berechnung bei vorgegebener äußerer Belastung) ist z. B. durch Erweiterung des Zustandsvektors und der hier angegebenen Übertragungsmatrizen um eine 13. Reihe, wie in (52) schematisch angedeutet,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{r} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}_t \quad (52)$$

oder andere Verfahren ([1, 4, 9, 12]) ohne weiteres möglich. Die Darstellung der dabei anzuwendenden Rechenverfahren war nicht das Ziel dieser Arbeit. Sie sind hinlänglich beschrieben (vgl. Literaturverzeichnis) und werden hier als bekannt vorausgesetzt. Vielmehr sollten hier nur die für die Berechnung eines räumlichen Stabwerkes nötigen Übertragungsmatrizen bereitgestellt werden. Dabei wurde insbesondere bei der Aufstellung der Eckmatrix darauf geachtet, daß die erforderlichen Daten in möglichst einfacher Weise aus der Konstruktionszeichnung entnommen werden können.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} u \\ N \\ \delta \\ T \\ v \\ \varphi \\ M_z \\ -Q_y \\ -w \\ \psi \\ M_y \\ Q_z \end{array} \begin{array}{c} +0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
 \equiv \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} 1 \\ -m\omega^2 \quad 1 \\ 1 \\ -(\Theta_z + mr^2)/\omega^2 \quad 1 \\ 1 \\ 1 \\ m\omega^2 d \quad -m\omega^2 d \quad -[\Theta_z + m(e^2 + d^2)]/\omega^2 \quad 1 \\ -m\omega^2 f \quad m\omega^2 f \quad m\omega^2 d \quad 1 \\ 1 \\ 1 \\ -m\omega^2 f \quad m\omega^2 e d \quad m\omega^2 e f \\ -m\omega^2 e \end{array} \\
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} u \\ N \\ \delta \\ T \\ v \\ \varphi \\ M_z \\ -Q_y \\ -w \\ \psi \\ M_y \\ Q_z \end{array} \begin{array}{c} -0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
 (51)
 \end{array}$$

4. Verzeichnis der Formelzeichen

X, Y, Z	Festes rechtwinkliges, rechtshändiges Koordinatensystem zur Beschreibung des Verlaufes der Stabachse
x, y, z	Die Stabachse begleitendes, rechtshändiges Hauptträgheitsachsensystem (x -Achse mit Stabachse zusammenfallend und in Fortschrittsrichtung weisend)
ξ, η, ζ	Zwischensystem zur Beschreibung der Lage der Hauptträgheitsachsen im Stabquerschnitt
χ	Winkel, um den das ξ, η, ζ -System um die ξ -Achse in mathematisch positivem Sinn gedreht werden muß, um es in das x, y, z -System zu überführen
P, Q, R	Punkte zur Festlegung einer Knickstelle
$\mathbf{a} = \vec{PQ} = \{a_x, a_y, a_z\}$	Vektoren, die mit den im Knickpunkt an die Stabachse gelegten
$\mathbf{b} = \vec{QR} = \{b_x, b_y, b_z\}$	Tangenten zusammenfallen

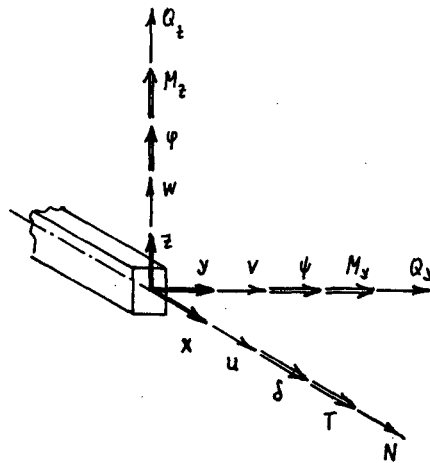


Abb. 16. Verformungs- und Schnittgrößen

Verformungs- und Schnittgrößen (Abb. 16):

u, v, w	Verschiebung in Richtung der x -, y - bzw. z -Achse
δ, ψ, φ	Verdrehung um die x -, y - bzw. z -Achse
N, Q_y, Q_z	Normalkraft sowie Querkräfte in Richtung der y - bzw. z -Achse
T, M_y, M_z	Torsionsmoment sowie Biegemomente bezüglich der y - bzw. z -Achse
$-o$	Kennzeichnung der Stelle unmittelbar vor einem Knick bzw. einer Einzelmasse
$+o$	Kennzeichnung der Stelle unmittelbar hinter einem Knick bzw. hinter einer Einzelmasse

Literatur

- [1] *Falk, S.*: Biegen, Knicken und Schwingen des mehrfeldrigen geraden Balkens, Abhandl. d. Braunschweigischen Wissensch. Gesellschaft Bd. VII 1955.
- [2] *Falk, S.*: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren, Ingenieur-Archiv Bd. 24 (1956).
- [3] *Falk, S.*: Die Berechnung offener und geschlossener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren, Ingenieur-Archiv Bd. 26 (1958).
- [4] *Fuhrke, H.*: Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls, Ingenieur-Archiv Bd. 23 (1955).
- [5] *Fuhrke, H.*: Bestimmung von Rahmenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls, Ingenieur-Archiv Bd. 24 (1956).
- [6] *Fuhrke, H.*: Eigenwertbestimmung mit Hilfe von abgeleiteten Übertragungsmatrizen, VDI-Bericht Bd. 30 (1958).
- [7] *Klotter, K.*: Technische Schwingungslehre, 2. Bd, 2. Aufl. Springer-Verlag Berlin 1960, (Kap. 7).
- [8] *Leckie, F. und Pestel, E.*: Transfer. Matrix Fundamentals, Int. Journ. Mech. Sci., Pergamon Press Ltd. 1960, Vol. 2.
- [9] *Pestel, E.*: Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Stabwerken, Abhandl. d. Braunschweigischen Wissensch. Gesellschaft, Bd. VI (1954).
- [10] *Pestel, E. und Mahrenholtz, O.*: Zum numerischen Problem der Eigenwertbestimmung mit Übertragungsmatrizen, Ingenieur-Archiv, Bd. 28 (1959).
- [11] *Pestel, E., Schumpich, G. und Spierig, S.*: Katalog von Übertragungsmatrizen zur Berechnung technischer Schwingungsprobleme, VDI-Berichte, Bd. 35 (1959 *).
- [12] *Schumpich, G.*: Beitrag zur Kinetik und Statik ebener Stabwerke mit gekrümmten Stäben, Österr. Ingenieur-Archiv, Bd. 11 (1957).
- [13] *Zurmühl, R.*: Matrizen, 2. Aufl., Springer-Verlag Berlin 1958.

*) Hier befindet sich in der Matrix zu Fall II.2.1.c (elastischer masseloser Kreisbogen bei Schwingungen in der Ebene der Zentrallinie) ein Druckfehler. Das Element u_{12} muß richtig heißen:

$$u_{12} = \frac{eF_1}{EF} + \frac{e^3 F_6}{EJ_z}$$